3- EQUATION DE PROPAGATION DES ONDES ELECTRO-MAGNETIQUES

Plaçons nous **dans le vide** hors des endroits où il y a des charges ou des courants. Reprenons les équations de Maxwell données plus haut et combinons les deux équations impliquant l'opérateur différentiel rotationnel:

$$\vec{Rot}\left(\vec{Rot}\,\vec{E}\right) = -\frac{\partial(Rot\,\vec{B})}{\partial t} = -\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

♦ ***Exercice 3--1.:*** *Prenons le cas où le champ électrique et le champ magnétique ne dépendent que de la variable x.*

Montrer en utilisant l'une des équations de Maxwell que E_x est constant. On prendra cette constante nulle par la suite.

Considérons un champ dirigé suivant y

Montrer que l'équation précédente conduit à :

$$-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

En déduire la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

♦ ***Exercice 3--2.:*** *Montrer en coordonnées cartésiennes que*

$\vec{Rot}\left(\vec{Rot}\,\vec{E}\right) = \vec{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$.

On en déduit donc que : $\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$.

Ceci est bien une équation d'onde et la célérité est donnée par : $\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$.

A l'époque de Maxwell, on calculait c à partir des valeurs numériques des constantes ε_0 et μ_0 déduites des phénomènes statiques. On mesure maintenant c :

$$c = 299\ 792\ 458\ ms^{-1}.$$

La constante μ_0 est déduite de la définition de l'Ampère : $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,Hm^{-1}$.

On en déduit alors $\varepsilon_0\ \ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 10^9\,F^{-1}m$.

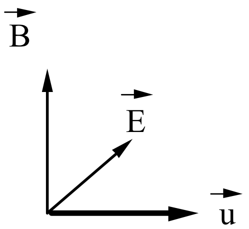
♦ ***Exercice 3--3.:*** *Montrer que le champ magnétique suit la même équation d'ondes que le champ électrique.*

Reprenons le cas d'une onde plane où les champs électriques et magnétiques ne dépendent que de x. En utilisant $div(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ et $div(\vec{B}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$, il est facile de montrer que les composantes suivant x des champs électrique et magnétique sont constantes et on le sprend nulles car seules les variations de ces champs nous intéressent. Prenons donc le champ électrique dirigé suivant y.

En utilisant $Rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, c'est-à-dire : $\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = 0$, on en déduit que le champ magnétique est dirigé suivant z et que : $\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$. Pour une onde plan,e progressive se dirigeant vers les x croissant , alors : $\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$ et donc $B_z = \frac{E_y}{c}$, que l'on pet écrire vectoriellement comme : $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{E}$, où $\vec{u}$ est la direction de propagation $\vec{u}$.

Nous allons en déduire les propriétés d'une onde plane homogène:

Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane homogène se propageant dans le vide est transversal c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation. Il en est de même du champ magnétique. Les deux champs sont reliés par la relation :



$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{E}}$$

$$\boxed{\left\|\vec{B}\right\| = \frac{\left\|\vec{E}\right\|}{c}}$$

__Cas des ondes sinusoïdales:__

Vous connaissez de nombreuses ondes électro-magnétiques sinusoïdales (cf introduction). Ce qui les distingue les unes des autres c'est leur fréquence.

Il est important de noter que certaines ondes radio sont modulées en fréquence, c'est-à-dire que leur fréquence varie dans le temps avec une période associée à celle des ondes sonores. D'autres ondes radio sont modulées en amplitude, c'est cette amplitude qui varie « lentement » dans le temps.

Dans le cas d'ondes planes sinusoïdales caractérisées par la pulsation ω et le vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est la direction de propagation.

Le champ électrique s'écrit donc : $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\right]$ Le champ magnétique s'écrit donc : $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\right]$.

On peut montrer alors que :

$$div(\vec{E}) = -i\vec{k}.\vec{E}\,,\quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$$

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

Ceci est aussi vrai pour le champ magnétique.

On en déduit alors en utilisant les équations de Maxwell dans le vide que les champs électriques et magnétiques sont bien perpendiculaires à la direction de propagation et que

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{E} \; .$$

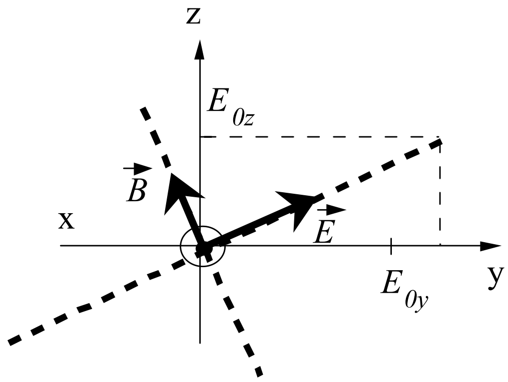
NOTION DE POLARISATION :

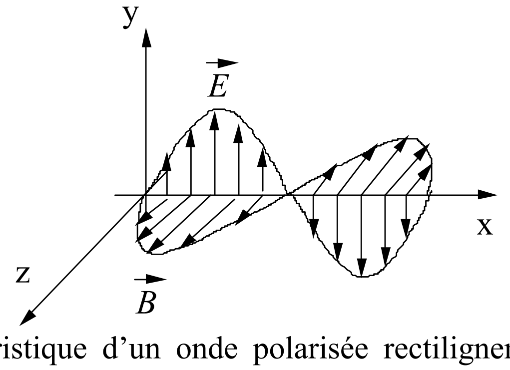
Quand la direction du champ électrique est constante, par exemple suivant y alors que l'onde se propage suivant x, on parle de **polarisation rectiligne**. La direction du champ magnétique est alors elle aussi fixée et est perpendiculaire à la fois à la direction de propagation et au champ électrique. Considérons une onde plane progressive se propageant dans le vide dans la direction x telle que :

$$\vec{E}(\vec{r},t)\begin{cases} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_{\mathrm{y}}) \\ E_{0z}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_{\mathrm{z}}) \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)\begin{cases} 0 \\ -\dfrac{E_{0z}}{c}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_{\mathrm{z}}) \\ \dfrac{E_{0y}}{c}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_{\mathrm{y}}) \end{cases}$$

Cas d'une polarisation rectiligne : $\varphi_y = \varphi_z$ ou $\varphi_y = \varphi_z + \pi.$, le champ électrique garde la même direction quels que soient x et t.





Remarque : la caractéristique d'un onde polarisée rectilignement est le fait que le champ électrique garde une direction constante : une onde polarisée rectilignement n'est donc pas nécessairement sinusoïdale.

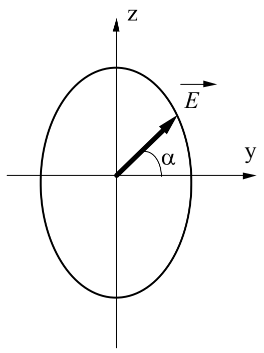
Polarisation circulaire et elliptique :

Considérons les cas où $\varphi_z = \varphi_y + \frac{\pi}{2}$. Le champ électrique devient :

$$\vec{E}(\vec{r},t)\begin{cases} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_\mathrm{y}) \\ -E_{0z}\sin(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_\mathrm{y}) \end{cases}$$

En un point donné de l'espace, c'est-à-dire si x est fixé, le vecteur E change de direction dans le temps. Son extrémité décrit une ellipse :

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = 1.$$



$$\alpha = -(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_\mathrm{y})$$

α décroît quand le temps augmente. L'ellipse est donc parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, donc dans le sens inverse du sens trigonométrique standard.
On parle alors de **polarisation elliptique droite.**
Si de plus $E_{0y} = E_{0z}$, l'ellipse est un cercle. On parle alors de **polarisation circulaire droite**.

♦ ***Exercice 3--4.:*** *Montrer que dans le cas où $\varphi_z = \varphi_y - \frac{\pi}{2}$ on a affaire à une polarisation elliptique gauche.*

Plus généralement , on dit qu'une onde polarisée circulairement ou elliptiquement est droite si le champ électrique en un point donné tourne dans le temps dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe de propagation, quand on regarde l'onde arriver

La lumière et les ondes électro-magnétiques plus généralement sont-elles polarisées ?

Sources polarisées :
Les antennes des émetteurs de radiodiffusion et de télévision comportent des barreaux métalliques et le champ électrique de l'onde émise a une direction bien définie par rapport à la direction de ces barreaux et la position du point considéré. L'onde reçue est polarisée rectilignement. Le rayonnement synchrotron tel celui fourni actuellement par le LURE (Orsay) puis bientôt par Soleil est lui aussi polarisé. Les rayons X sont émis par des particules chargées (électrons ou positrons) en orbite fermée dans une chambre à vide. Dans les parties courbes, le rayonnement émis est parallèle au plan de la trajectoire et polarisé rectilignement.
Certains lasers sont aussi polarisés rectilignement. Cela provient du fait que des éléments optiques dans la cavité transmettent mieux la lumière avec une certaine polarisation que la polarisation orthogonale.

Sources classiques :

Qu'il s'agisse de lampes à incandescence ou de lampes à décharges, dans ce cas, la lumière n'est pas polarisée car le rayonnement total est la superposition de rayonnement émis par des émetteurs élémentaires (atome ou molécule). Chaque atome émet un rayonnement quasi-sinusoïdal. Elles ont une fréquence caractéristique, c'est-à-dire une période caractéristique (10^{-14} à 10^{-15} s). Leur amplitude varie plus lentement dans le temps et de façon aléatoire avec un temps caractéristique (10^{-8} à 10^{-11} s) nettement inférieur au temps de réponsee des détecteurs (10^{-6} s). Si l'onde émise par chaque atome est polarisée à un instant donné, cet état de polarisation évolue progressivement et au niveau du détecteur, tous les états de polarisation apparaissent de façon équiprobable.

Comment peut-on polariser la lumière ?

Le plus simple est d'utiliser un film de polymère appelé polaroïd constitué de longues molécules allongées dans une certaine direction. Ce film transmet essentiellement la composante de la lumière polarisée suivant une direction donnée (théoriquement uniquement). Si la lumière incidente est polarisée rectilignement, l'intensité transmise varie comme

$$\boxed{I_t \approx I_i \cos^2 \beta} \text{ Loi de Malus}$$

où β est l'angle entre la polarisation incidente et la direction privilégiée du polariseur.

Plus généralement considérons une onde plane polarisée rectilignement se propageant dans le direction x. Plaçons l'axe du polariseur parallèlement à la direction y. On note toujours β l'angle entre la polarisation incidente et la direction privilégiée du polariseur

Le champ électrique de l'onde incidente s'exprime donc :

$$\begin{cases} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) = E_0\cos\beta\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) \\ E_{0z}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) == E_0\sin\beta\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) \end{cases}$$

L'onde émergente , si on néglige l'absorption, est donc aussi une onde plane mais dont la polarisation et l'intensité a changé:

$$\begin{cases} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) = E_0\cos\beta\cos(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) \\ 0 \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que l'intensité en moyenne dans le temps pour un point x donné, c'est-à-dire là où l'on place le détecteur, suit bien la loi de Malus.

Que se passe-t-il pour la lumière naturelle ?

En fait la polarisation change au cours du temps. Considérons l'intensité instantanée du signal:

$$I(t,x) = \frac{1}{\mu_0 c}E^2 = \frac{1}{\mu_0 c}(E_{0y}^2 + E_{0z}^2)\cos^2(\omega\,\mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0)$$

Si on moyenne sur quelques périodes, ce que fait le détecteur :

$$\langle I(t,x)\rangle_t = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0 c}\left(E_{0y}^2 + E_{0z}^2\right)$$ si les amplitudes des champs électriques sont constantes

En fait les amplitudes des champ électriques varient dans le temps . il faut reconsidérer la moyenne précédente :

$$\rangle \mathbf{I(t,x)} \langle = \frac{\mathbf{1}}{\mu_{\mathbf{0}}\mathbf{c}} \rangle (\mathbf{E}_{\mathbf{0y}}^{2} + \mathbf{E}_{\mathbf{0z}}^{2})\,\mathbf{cos}^{2}(\omega\,\mathbf{t} - \mathbf{kx} + \varphi_{\mathbf{0}}) \langle\ .$$

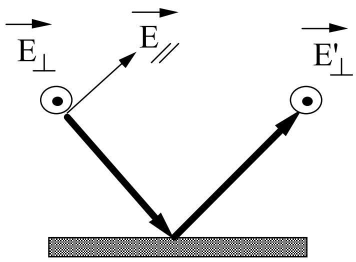
Les amplitudes varient néanmoins beaucoup moins vite que la période de l'onde :

$$\rangle I(t,x) \langle = \frac{1}{\mu_0 c} \rangle \frac{1}{2}(E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \langle = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right)$$

Comme la variation est aléatoire, l'intensité se décompose de la même façon sur y et sur z, donc : $I_z = I_y = \frac{I}{2}$.

A la sortie du polariseur, seule la composante du champ suivant y va passer, on ne récupère plus que l'intensité Iy , donc, si on ne prend pas en compte l'absorption, la moitié de l'intensité initiale, mais maintenant l'onde est polarisée.

Une autre méthode pour polariser une onde lumineuse non polarisée est d'utiliser la réflexion sur une surface (verre par exemple) dans certaines conditions :



Si l'angle d'incidence est 45°, alors l'onde réfléchie est polarisée. D'ailleurs pour éviter ces reflets sur les photographies, les photographes utilisent un polariseur orienté quasiment perpendiculairement à cette direction de polarisation….